17 задание ЕГЭ
Экономические задачи

3.05.2021г.

Учитель математики : Лободенко С.Б.

№1

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S — натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы

− каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

− в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	**Июль 2016**	**Июль 2017**	**Июль 2018**	**Июль 2019**
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Решение.

Долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на июль каждого года должен уменьшиться до нуля следующим образом: $S;\ 0,7S;\ 0,4S;\ 0.$

По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 15% значит, долг в январе каждого года равен: $1,15S;\ 0,805S;\ 0,46S.$

Следовательно, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют:

$$0,45S;\ 0,405S;\ 0,46S.$$

По условию, числа $S;\ \frac{9S}{20};\ \frac{81S}{200};\ \frac{23S}{50}$ должны быть целыми.

Значит, число *S* должно делиться на 20, 200 и 50.

Наименьшее общее кратное этих чисел равно 200.

Ответ: 200.

№2

В июле клиент планирует взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет).

Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планирует клиент взять кредит, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

Решение.

- Пусть кредит планируется взять на *n* лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$28,\ \frac{28(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{28\cdot 2}{n},\ \frac{28}{n},\ 0.$$

- По условию, каждый январь долг возрастает на 25%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$35,\ \frac{35(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{35\cdot 2}{n},\ \frac{35}{n}.$$

- Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$7+\frac{28}{n},\ \frac{7(n-1)+28}{n},\ \ldots,\ \frac{7\cdot 2+28}{n},\ \frac{7+28}{n}.$$

- Получаем $7+\frac{28}{n}=9,$ откуда $n=14.$

Ответ: 14

№3

Имеются три пакета акций. Суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с количеством акций в третьем пакете.

Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета.

Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тысяч рублей до 20 тысяч рублей, а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 тысяч рублей и не больше 60 тысяч рублей.

Определить, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

- **Решение.**
- Введём обозначения так, как показано в таблице (выделено цветом), и затем заполним оставшиеся ячейки по данным из условия:

	Первый пакет	**Второй пакет**	**Третий пакет**
Цена одной акции, тыс. руб.	x		
Количество акций в пакете, шт	y	ly	$y(l+1)$
Цена пакета, тыс. руб.	xy	$4xy$	$5xy$

- Заметим, что цена одной акции из второго пакета равна $\frac{4x}{l}$ тыс. руб., а цена одной акции из третьего пакета равна $\frac{5x}{l+1}$ тыс. руб., причем из условия следует, что $0 < l < 4.$
- Требуется определить наибольшее и наименьшее значение величины $\frac{y}{2y(l+1)} = \frac{1}{2(l+1)},$ выраженное в процентах.

Из условия имеем:

$$\begin{cases} 16 \le \dfrac{4x}{l} - x \le 20, \\ 42 \le \dfrac{5x}{l+1} \le 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16l}{4-l} \le x \le \dfrac{20l}{4-l}, \\ \dfrac{42}{5}(l+1) \le x \le 12(l+1). \end{cases}$$

Отрезки [*a*; *b*] и [*c*; *d*] пересекаются тогда и только тогда, когда *a* ≤ *d* и *c* ≤ *b* одновременно, поэтому полученная система имеет решения тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} \dfrac{16l}{4-l} \le 12(l+1), \\ \dfrac{42}{5}(l+1) \le \dfrac{20l}{4-l}. \end{cases}$$

Решим эту систему на интервале (0; 4):

$$\begin{cases} \dfrac{16l}{4-l} \le 12(l+1), \\ \dfrac{42}{5}(l+1) \le \dfrac{20l}{4-l} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4l \le 3(l+1)(4-l), \\ 21(l+1)(4-l) \le 50l \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3l^2 - 5l - 12 \le 0, \\ 21l^2 - 13l - 84 \ge 0 \end{cases} \begin{cases} -\dfrac{4}{3} \le l \le 3, \\ \left[\begin{array}{l} l \ge \dfrac{7}{3}, \\ l \le -\dfrac{12}{7}. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{7}{3} \le l \le 3.$$

Тем самым,

$$\frac{20}{3} \le 2(l+1) \le 8 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le \frac{1}{2(l+1)} \le \frac{3}{20} \Leftrightarrow 0,125 \le \frac{1}{2(l+1)} \le 0,15,$$

т. е. искомая доля меняется от 12,5% до 15%.

Ответ: 12,5% и 15%.

- **Рассмотрим решение И. В. Фельдман.**
- Будем считать, что общая стоимость акций фиксирована. Давайте для начала введем переменные:
-

	Первый пакет	Второй пакет	Третий пакет
Количество акций	n	m	$n + m$
Цена акции	x	y	z

- Тогда стоимость первого пакета акций равна nx, второго my, третьего $(n + m)z$.

- Теперь внимательно читаем задачу:
- 1. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, следовательно, $4nx = my$.
- 2. Суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета, следовательно,
- $nx + my = z(n + m)$.
- 3. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. р. до 20 тыс. р., следовательно, $16 \le y - x \le 20$.
- 4. Цена акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. р. и не больше 60 тыс. р., следовательно, $42 \le z \le 60$.

Получили систему условий:

$$\begin{cases} 4nx = my, \\ nx + my = z(n+m), \\ 16 \le y - x \le 20, \\ 42 \le z \le 60. \end{cases}$$

- В первую очередь разберемся с неравенствами. По условию задачи нам нужно найти, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.
- Этот процент равен $$\frac{n}{n+m+(n+m)}\cdot 100\% = \frac{n}{2(n+m)}\cdot 100\%.$$

Сначала найдем, при каких условиях этот процент будет наименьшим.

Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Поэтому чем меньше акций в третьем пакете, тем меньше суммарное количество акций в первых двух пакетах.

Акций в третьем пакете тем меньше, чем больше их стоимость.

Следовательно, чтобы получить наименьший процент акций из первого пакета, мы должны взять наибольшую стоимость акций из третьего, то есть берем z = 60.

- Далее. Чем дешевле акции из второго пакета, тем их больше, и тем меньше остается акций в первом пакете (суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете). Следовательно, разность между стоимостью акции из первого пакета и акции из второго пакета должна быть наименьшей. Поэтому берем $y - x = 16$.
- Получили систему уравнений: $$\begin{cases} 4nx = my, \\ nx + my = z(n+m), \\ y - x = 16, \\ z = 60. \end{cases}$$
- В этой систем 4 уравнения и 5 неизвестных, поэтому мы не можем найти значение каждой неизвестной величины. Но мы можем найти их соотношение. Для этого вернемся вернемся к вопросу задачи. Нам нужно найти значение выражения $\frac{n}{2(n+m)} \cdot 100\% \ (1)$

Рассмотрим дробь $\frac{n}{2(n+m)}$. Обратная ей дробь равна $\frac{2(n+m)}{n} = 2 + 2\frac{m}{n}.$

То есть если мы найдем отношение $\frac{m}{n}$, то задача будет решена. Из первого, второго и четвертого уравнений системы получим $5nx = 60(n+m)$ (2)

Из третьего уравнения выразим *y* через *x*, получим $y = x + 16.$ Подставим это выражение для *y* в первое уравнение и выразим *x* через *n* и *m*:

$$4nx = m(x+16) \Leftrightarrow 4nx = mx + 16m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4nx - mx = 16m \Leftrightarrow x(4n-m) = 16m \Leftrightarrow x = \frac{16m}{4n-m}.$$

Подставим это выражение для *x* в уравнение (2). Получим: $5n \cdot \frac{16m}{4n-m} = 60(n+m)$

Разделим обе части равенства на 20 и умножим на $4n - m.$

Получим: $4mn = 3(n+m)(4n-m)$ Раскроем скобки, приведем подобные члены и перенесем слагаемые в одну сторону, получим: $3m^2 - 5mn - 12n^2 = 0.$

Разделим обе части равенства на $n^2,$ и решим квадратное уравнение относительно $\frac{m}{n}$:

$$3\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 5\frac{m}{n} - 12 = 0$$

Получим 2 значения $\frac{m}{n}=-\frac{4}{3}$ и $\frac{m}{n}=3.$

Так как *n* и *m* — натуральные числа, нам подходит только $\frac{m}{n}=3.$ То есть $m=3n.$

Подставим это соотношение в выражение (1): $\frac{n}{2(n+m)}\cdot 100\%=\frac{n}{8n}\cdot 100\%=12,5$

Итак, наименьший процент от общего количества акций, который может содержаться в первом пакете, равен 12,5%.

Аналогичным образом найдем наибольший процент от общего количества акций, который может содержаться в первом пакете.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4nx=my, \\ nx+my=z(n+m), \\ y-x=20, \\ z=42. \end{cases}$$

Из первого, второго и четвертого уравнений получим $5nx=42(n+m)\ (3).$ Из третьего уравнения выразим *y* через *x*, получим $y=x+20.$

Подставим это выражение для y в первое уравнение и выразим x через n и m.
Получим: $x = \frac{20m}{4n-m}.$

Подставим это выражение для x в уравнение (3). Получим: $5n \cdot \frac{20m}{4n-m} = 42(n+m)$

Разделим обе части равенства на 2 и умножим на $4n-m$ Получим:

$$50mn = 21(n+m)(4n-m).$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены и перенесем слагаемые в одну сторону, получим: $84n^2 + 13mn - 21m^2 = 0.$

Разделим обе части равенства на n^2, умножим на −1 и решим квадратное уравнение относительно $\frac{m}{n}$:

$$21\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 13\frac{m}{n} - 84 = 0$$

Получим 2 значения $\frac{m}{n} = -\frac{12}{7}$ и $\frac{m}{n} = \frac{7}{3}$. Так как n и m — натуральные числа,

нам подходит только $\frac{m}{n} = \frac{7}{3}.$ То есть $m = \frac{7}{3}n.$

Подставим это соотношение в выражение (1):

$$\frac{n}{2(n+m)} \cdot 100\% = \frac{n}{2+\frac{7}{3}n} \cdot 100\% = \frac{3}{20} \cdot 100\% = 15\%.$$

- Итак, наибольший процент от общего количества акций, который может содержаться в первом пакете, равен 15%.
-
- Ответ: 12,5% и 15%.

№4

В январе 2014 года Семён Маркович взял в банке кредит на сумму 6 млн руб. на покупку новой квартиры.

Кредит ему выдали на 6 лет под 14% годовых, причём выплачивать его Семён Маркович должен был так, чтобы сумма долга каждый год уменьшалась на одну и ту же величину.

В январе 2020 года Семён Маркович сразу после выплаты кредита продал квартиру по цене, превышающей первоначальную стоимость квартиры на 60%. Какую сумму в итоге заработал Семён Маркович?

Решение.

- Кредит на сумму 6 млн руб. взят на 6 лет, а сумма долга каждый год должна уменьшаться на одну и ту же величину. Значит, сумма долга ежегодно должна уменьшаться на 1 млн руб. Заполним таблицу:

Год	**Долг после начисления процентов, млн руб.**	**Выплата, млн руб.**	**Долг до начисления процентов, млн руб.**
2014			6
2015	$6 \cdot 1,14$	$6 \cdot 1,14 - 5$	5
2016	$5 \cdot 1,14$	$5 \cdot 1,14 - 4$	4
2017	$4 \cdot 1,14$	$4 \cdot 1,14 - 3$	3
2018	$3 \cdot 1,14$	$3 \cdot 1,14 - 2$	2
2019	$2 \cdot 1,14$	$2 \cdot 1,14 - 1$	1
2020	$1 \cdot 1,14$	$1 \cdot 1,14 - 0$	0

- Найдём сумму выплат: $B =$

$$= 6 \cdot 1,14 - 5 + 5 \cdot 1,14 - 4 + 4 \cdot 1,14 - 3 + 3 \cdot 1,14 - 2 + 2 \cdot 1,14 - 1 + 1 \cdot 1,14 =$$

$$= 1,14 \cdot (6+5+4+3+2+1) - (5+4+3+2+1) = 1,14 \cdot 21 - 15 = 8,94$$ млн руб.

Будем считать, что первоначальная цена квартира была равна сумме, взятой в кредит. Тогда в январе 2020 года квартиру продали за сумму, превышающую первоначальную стоимость квартиры на 60%, т. е. за $S = 6 \cdot 1,6 = 9,6$ млн руб.

- Таким образом, Семёну Марковичу удалось заработать $9,6 - 8,94 = 0,66$ млн руб. или 660 тыс. руб.
-
- Ответ: 660 тыс. рублей.

- **№5**

- 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 13 месяцев.
- Условия возврата таковы:
- — 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- — 15-го числа каждого месяца с 1-го по 12-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- — к 15-му числу 13-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
- Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 804 тысячи рублей?

Решение.

- Пусть сумма кредита A тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:
- A; $A - 50$; $A - 100$; ... $A - 550$; $A - 600$; 0.
- Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:
- $1{,}02A$; $1{,}02(A - 50)$; ... $1{,}02(A - 550)$; $1{,}02(A - 600)$
- Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:
- $0{,}02A + 50$; $0{,}02(A - 50) + 50$; ... $0{,}02(A - 550) + 50$; $1{,}02(A - 600)$.
- Всего следует выплатить (тыс. рублей). $$12 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{2A - 550}{2} + 12 \cdot 50 + 1{,}02(A - 600) = 1{,}26A - 78$$
- Откуда $1{,}26A - 78 = 804;\ 1{,}26A = 882;\ A = 700.$ Значит, сумма, которую планируется взять в кредит равна 700 тыс. рублей.
- Ответ: 700 тысяч рублей