16. Планиметрическая задача

(для 11А,Б классов)

26.04.2021 г.

ЗАДАЧА 1

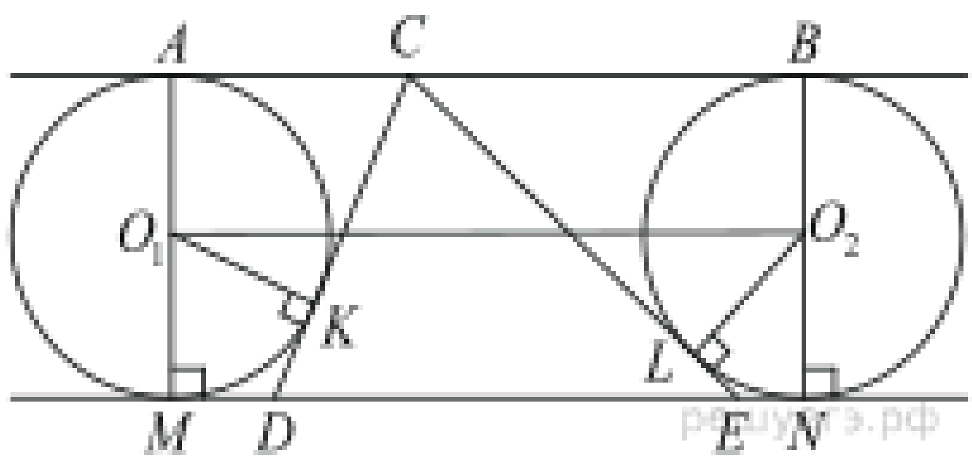
К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные.
Окружности касаются одной из этих прямых в точках *A* и *B.*
Через точку *C*, лежащую на отрезке *AB*, проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках *D* и *E*, причём отрезки *CA* и *CD* касаются одной окружности, а отрезки *CB* и *CE* — другой.

а) Докажите, что периметр треугольника *CDE* вдвое больше расстояния между центрами окружностей.

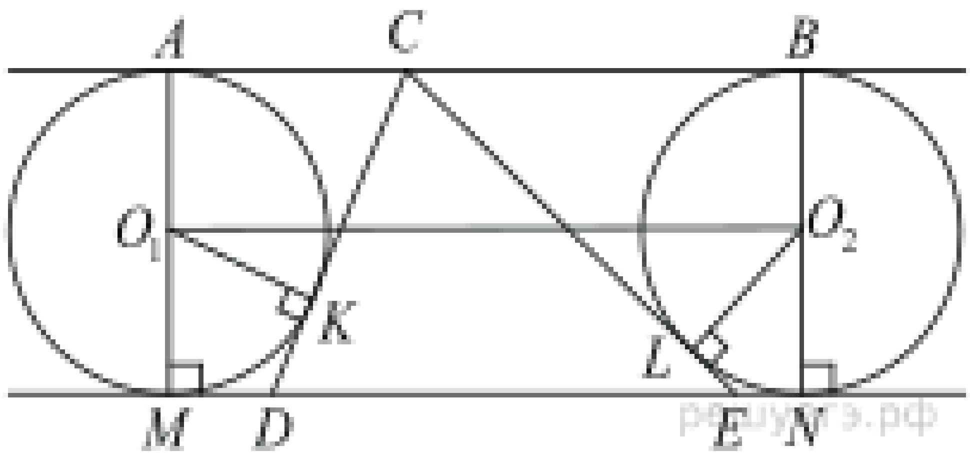
б) Найдите *DE*, если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а $AC = 8$.

Решение

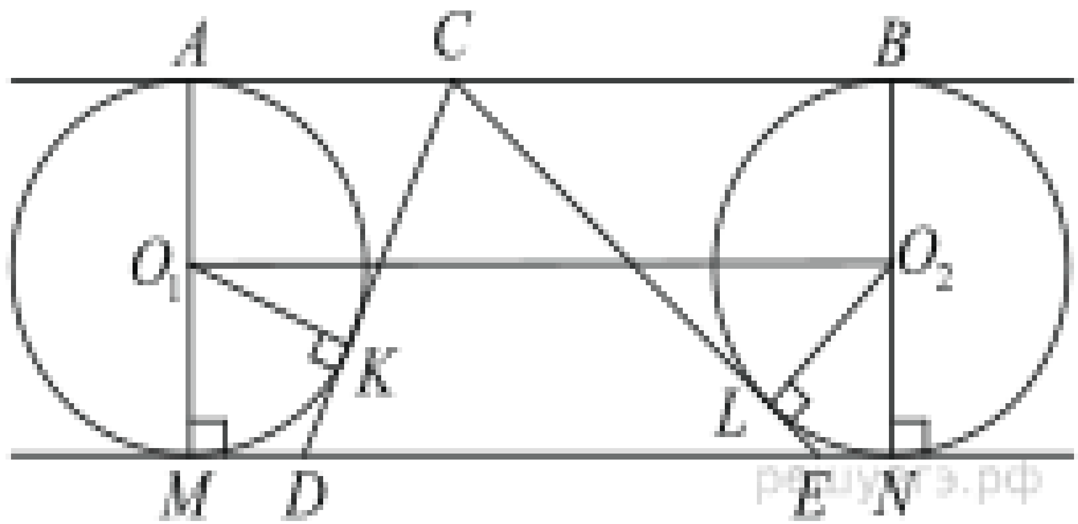
а) Пусть O_1 — центр окружности, которая касается отрезка CD,
O_2 — центр окружности, которая касается отрезка CE,
R — радиус окружностей.
Окружность с центром O_1 касается отрезка CD в точке K, а прямой DE в точке M;
окружность с центром O_2 касается отрезка CE в точке L, а прямой DE в точке N (рис. 1).



Получаем, что AO_1O_2B и MO_1O_2N — прямоугольники, следовательно, $AB = O_1O_2$ и $MN = O_1O_2$.
По свойству
касательных $CA = CK$, $DM = DK$, $CB = CL$, $EL = EN$.



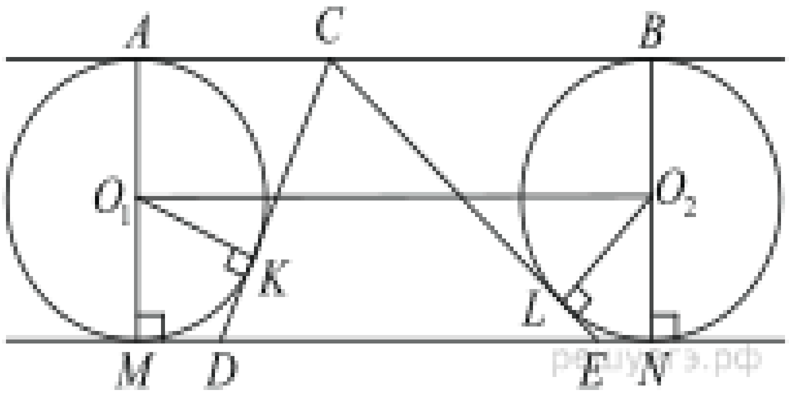
Тогда периметр треугольника *CDE*

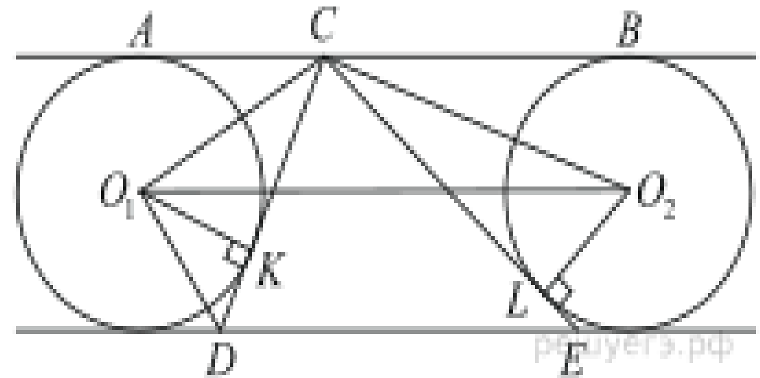


$$P_{CDE}=CD+DE+CE=DK+CK+CL+EL+DE=$$

$$=MD+AC+CB+EN+DE=AB+MN=2O_1O_2.$$

б) Точка O_1 лежит на биссектрисах углов MDC и ACD (рис. 2), следовательно,

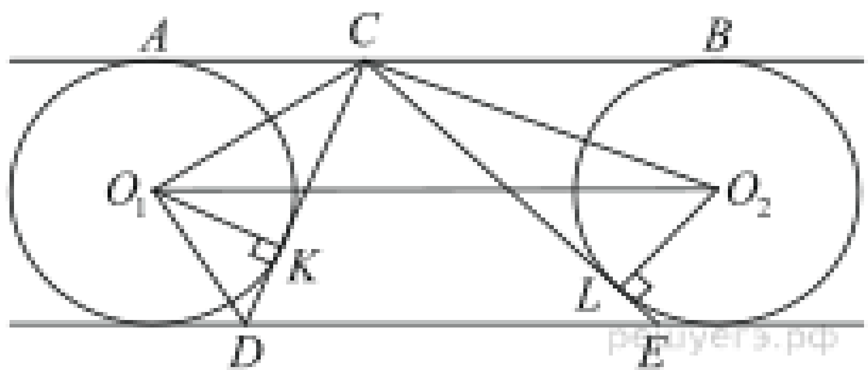




$$O_1DC + \angle O_1CD = \frac{1}{2}\angle MDC + \frac{1}{2}\angle ACD =$$

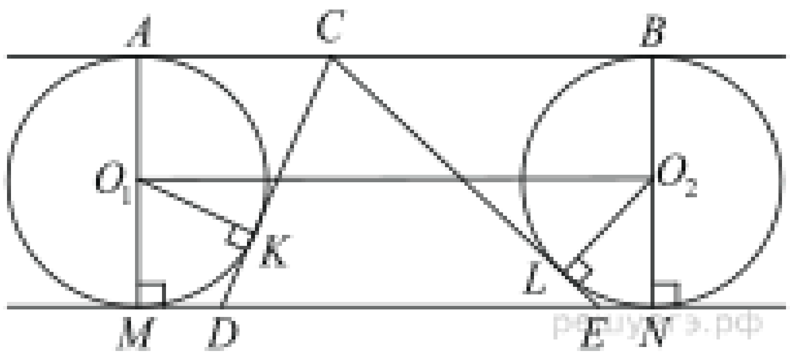
$$= \frac{1}{2}\left(\angle MDC + \angle ACD\right) = 90^\circ.$$

В прямоугольном треугольнике CO_1D имеем:



$$DK = \frac{KO_1^2}{CK} = \frac{R^2}{AC} = \frac{25}{8}.$$

Аналогично, $$EL = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$



Получаем, что

$$DE = MN - DM - EN = O_1O_2 - DK - EL = 18 - \frac{25}{8} - \frac{5}{2} = 12,375.$$